



# KALKULUS DIFERENSIAL

**Yuniarta Basani, M.Si.**  
**Mega Puspitorini, M.Si.**  
**Dita Monita, S.Pd., M.Si.**  
**Regina W. S. Ayu, S.Pd., M.Si.**  
**Mu'afa Purwa Arsana, M.Si.**

# KALKULUS DIFERENSIAL

Copyright © Oktober 2023

Penulis : Yuniarta Basani, M.Si.  
Mega Puspitorini, M.Si.  
Dita Monita, S.Pd., M.Si.  
Regina W. S. Ayu, S.Pd., M.Si.  
Mu'afa Purwa Arsana, M.Si.

Pemyunting : Misbahul Munir

Editor : Amriana

Ilustrasi Gambar : Freepik

Ukuran: 18.2 x 25.7 cm; Hal: iv + 97 (101)

Cetakan I, Oktober 2023

**ISBN 978-623-8450-01-5**



## **Penerbit**

### **Insight Mediatama**

Anggota IKAPI No. 338/JTI/2022

Watesnegoro No. 6 (61385) Mojokerto

Whatsapp 087762245559

mail@insightmediatama.co.id

www.insightmediatama.co.id

© **All Rights Reserved** Ketentuan Pidana Pasal 112-119 Undang-undang Nomor 28 Tahun 2014 Tentang Hak Cipta. Dilarang keras menerjemahkan, memfotokopi, atau memperbanyak sebagian atau seluruh isi buku ini tanpa izin tertulis dari penerbit dan penulis.

# **PRAKATA**

Buku Ajar Kalkulus Diferensial ini disusun merujuk pada beberapa sumber atau referensi yang digunakan untuk mengajar mata kuliah Kalkulus 1. Buku Kalkulus Diferensial ini terdiri dari 4 Bab yaitu Sistem Bilangan Real, Limit, Turunan, dan Aplikasi Turunan. Buku ajar ini menyesuaikan kurikulum di Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Palangka Raya. Soal-soal latihan yang diberikan secara runtut untuk membantu mahasiswa memahami materi atau mengulang kembali materi yang telah dipelajari. Jenis-jenis soal yang diberikan juga disesuaikan dengan kebutuhan untuk mempelajari materi-materi perhitungan pada mata kuliah selanjutnya.

Ucapan terima kasih kami sampaikan kepada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Palangka Raya atas pembiayaan penulisan buku ajar ini dari hibah penulisan buku ajar. Kami menampung kritik dan saran yang dapat digunakan untuk perbaikan selanjutnya.

Palangka Raya, Oktober 2023

Tim Penulis

# DAFTAR ISI

<b>PRAKATA</b> .....	iii
<b>BAB 1 Bilangan Real</b> .....	1
1.1    Pertidaksamaan dan Nilai Mutlak .....	4
1.2    Sistem Koordinat Cartesius .....	8
1.3    Grafik Persamaan .....	10
1.4    Fungsi dan Grafiknya .....	12
1.5    Operasi pada Fungsi .....	15
1.6    Fungsi Trigonometri .....	16
<b>BAB 2 LIMIT</b> .....	19
2.1    Pendahuluan Limit .....	20
2.2    Pengkajian Mendalam tentang Limit .....	23
2.3    Teorema-Teorema Limit .....	28
2.4    Limit di Ketakhinggaan dan Limit Tak Hingga .....	32
2.5    Fungsi Kontinu .....	36
<b>BAB 3 TURUNAN</b> .....	41
3.1    Dua Masalah dengan Satu Tema .....	42
3.2    Turunan .....	46
3.3    Aturan Pencarian Turunan .....	52
3.4    Aturan Fungsi Trigonometri .....	56
3.5    Aturan Rantai .....	59
3.6    Aturan Tingkat Tinggi .....	63
3.7    Diferensial Implisit .....	65
3.8    Laju yang Berkaitan .....	69
3.9    Diferensial dan Aproksimasi .....	71
<b>BAB 4 APLIKASI TURUNAN</b> .....	74
4.1    Nilai Ekstrim Fungsi .....	75
4.2    Kemonotonan dan Kecekungan .....	84
4.3    Penggambaran Grafik Fungsi .....	89

# BAB 1 BILANGAN REAL

Sasaran Materi:

## 1.1 Pertidaksamaan dan Nilai Mutlak

Menentukan penyelesaian pertidaksamaan dan nilai mutlak

## 1.2 Sistem Koordinat Cartesius

Memahami sistem koordinat cartesius dan konsep jarak

## 1.3 Grafik Persamaan

Menggambar grafik persamaan

## 1.4 Fungsi dan Grafiknya

Menentukan daerah asal dan daerah hasil fungsi dan menggambar grafik fungsi serta menjelaskan karakteristiknya

## 1.5 Operasi pada Fungsi

Melakukan operasi pada fungsi dan menentukan daerah asal fungsi yang dihasilkan

## 1.6 Fungsi Trigonometri

Mengenal beberapa fungsi khusus, baik persamaan maupun sifat-sifatnya

$$5. |f(x)| < |g(x)| \Leftrightarrow (f(x))^2 < (g(x))^2$$

$$6. |f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow (f(x))^2 > (g(x))^2$$

**Contoh 1.1.3:** Diberikan pertidaksamaan  $|x - 4| < 2$ . Tentukan solusi pertidaksamaan tersebut.

*Penyelesaian.* Perhatikan Teorema 2, maka pertidaksamaan berubah menjadi

$$|x - 4| < 2 \Leftrightarrow -2 < x - 4 < 2 \Leftrightarrow 2 < x < 6$$

Sehingga diperoleh himpunan penyelesaian  $H_p = \{x | 2 < x < 6\}$ .

### LATIHAN 1.A

Selesaikan pertaksamaan berikut:

$$1. \frac{1}{x+7} < \frac{1}{2}$$

$$2. x + 5 < \frac{2}{x}$$

$$3. |4x - 3| < |x + 1|$$

Maka persamaan lingkaran dengan jari-jari 5 dan berpusat di  $(1, -5)$  adalah

$$(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 25$$

### **LATIHAN 1.B**

Cari pusat dan jari-jari lingkaran dari persamaan

$$x^2 - 2x + y^2 + 6y = -6$$

## 1.5 OPERASI PADA FUNGSI

Misalkan  $f(x)$  dan  $g(x)$  fungsi real dengan daerah definisi  $D_f$  dan  $D_g$

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$  dengan  $D_{f+g} = D_f \cap D_g$
- $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$  dengan  $D_{f-g} = D_f \cap D_g$
- $(fg)(x) = f(x)g(x)$  dengan  $D_{fg} = D_f \cap D_g$
- $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$  dengan  $D_{f/g} = D_f \cap D_g \cap \{x | g(x) \neq 0\}$
- $f^n(x) = f(x)f(x) \dots f(x)$  dengan  $D_{f^n} = D_f$

### Fungsi Komposisi

Misalkan  $f(x)$  dan  $g(x)$  fungsi real dengan daerah definisi  $D_f$  dan  $D_g$ .

Komposisi dari  $f$  dan  $g$  dapat ditulis dengan

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Sehingga daerah definisi dan daerah nilai dari komposisi  $f$  dan  $g$  adalah

$$D_{g \circ f} = f^{-1}(R_f \cap D_g) \text{ dan } R_{g \circ f} = g(R_f \cap D_g).$$

**Contoh 1.5.1:** Diberikan  $f(x) = x + 4$  dan  $g(x) = x^2$ . Tentukan:

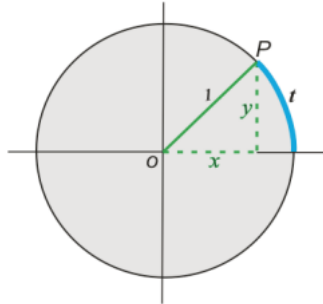
- $(f \circ g)(x)$
- $(f \circ g)(3)$

*Penyelesaian.* Perhatikan bahwa

- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 4$
- $(f \circ g)(3) = (3)^2 + 4 = 13$

## 1.6 FUNGSI TRIGONOMETRI

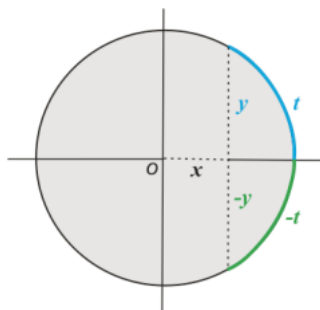
Perhatikan gambar lingkaran berjari-jari satu berikut. Posisi titik  $P = (x, y)$ . Sudut  $t$ -positif dihitung berdasarkan arah yang berlawanan jarum jam dengan



satuan radian.  $1^\circ = \frac{1}{180} \pi$  rad.

Misalkan  $f(t) = \sin t = y$  dan  $g(t) = \cos t = x$ , dengan  $D_f = D_g = \mathbb{R}$  dan  $R_f = R_g = [-1, 1]$ . Sudut  $t + 2\pi$  dan  $t$  menentukan posisi titik P yang sama, sehingga,  $\sin(t + 2\pi) = \sin t$  dan  $\cos(t + 2\pi) = \cos t$ .

Dikatakan fungsi tersebut **periodik** dengan periode  $2\pi$ .



## BAB 2 LIMIT

Sasaran Materi:

### 2.1 Pendahuluan Limit

Memahami konsep limit dan menentukan nilai limit secara intuitif

### 2.2 Pengkajian Mendalam Tentang Limit

Memahami definisi limit dan membuktikan limit fungsi sederhana dengan menggunakan definisi

### 2.3 Teorema Limit

Menggunakan teorema-teorema limit dalam perhitungan berbagai limit fungsi aljabar dan limit trigonometri

### 2.4 Limit di Tak-terhingga, Limit Tak-terhingga

Menghitung limit di tak hingga dan limit tak hingga

### 2.5 Kontinuitas Fungsi

Memeriksa kekontinuan fungsi dengan menggunakan Teorema Nilai Antara untuk memecahkan masalah yang relevan.

Pada bab ini akan diperkenalkan apa itu limit, dilanjutkan dengan pengkajian mendalam tentang limit (definisi formal limit), teorema-teorema limit untuk fungsi aljabar dan fungsi trigonometri, limit di ketakhinggaan dan limit tak hingga, dan terakhir akan dibahas tentang fungsi kontinu.

## 2.1 PENDAHULUAN LIMIT

Secara intuisi, limit diartikan sebagai berikut.

### **Definisi 2.1 Makna Limit secara Intuisi**

Misalkan  $f$  adalah fungsi yang terdefinisi pada interval buka  $I$  yang memuat  $c \in \mathbb{R}$  namun  $f$  mungkin tidak terdefinisi pada  $c$ , maka  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ , dibaca “limit  $f(x)$  ketika  $x$  mendekati  $c$  sama dengan  $L$ ”, berarti bahwa nilai fungsi  $f(x)$  mendekati  $L$  ketika nilai dari  $x$  mendekati  $c$  tapi  $x$  tidak sama dengan  $c$ .

Kata “mendekati” berarti  $x$  mendekati  $c$  dari kiri (nilai  $x$  kurang dari  $c$  dan semakin besar mendekati nilai  $c$ ), dinotasikan  $x \rightarrow c^-$ , dan juga  $x$  mendekati  $c$  dari kanan (nilai  $x$  lebih dari  $c$  dan semakin kecil mendekati nilai  $c$ ), dinotasikan  $x \rightarrow c^+$ . Sebagai ilustrasi, perhatikan tabel berikut.

$x$	$y = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$
1,25	3.8125
1,1	3.31
1,01	3.0301
1,001	3.003001
↓	↓
1	...
↑	↑
0,999	2.997001
0,99	2.9701
0,9	2.71
0,75	2.3125

## 2.2 PENGAJIAN MENDALAM TENTANG LIMIT

Pada subbab 2.1 sudah dibahas tentang definisi limit secara intuitif. Selanjutnya, akan dibahas secara mendalam mengenai limit yang dimulai dari definisi formalnya. Berikut definisi formal limit.

### **Definisi 2.3 Limit**

Misalkan  $f$  adalah fungsi yang terdefinisi pada interval buka  $I$  yang memuat  $c \in \mathbb{R}$ , namun  $f$  mungkin tidak terdefinisi pada  $c$ , maka  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$  jika dan hanya jika  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  sedemikian sehingga

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

**Contoh 2.2.1:** Dengan menggunakan definisi limit, buktikan bahwa

$$\lim_{x \rightarrow 4} 3x - 7 = 5.$$

*Penyelesaian*

*Analisis pendahuluan*

Ambil sebarang  $\varepsilon > 0$ . Kita harus memilih suatu  $\delta > 0$  sedemikian sehingga

$$0 < |x - 4| < \delta \Rightarrow |(3x - 7) - 5| < \varepsilon.$$

Tinjau pertidaksamaan di sebelah kanan,

$$|(3x - 7) - 5| < \varepsilon$$

$$|3x - 12| < \varepsilon$$

$$|3(x - 4)| < \varepsilon$$

$$|3||x - 4| < \varepsilon$$

$$3|x - 4| < \varepsilon$$

$$|x - 4| < \frac{\varepsilon}{3}$$

## LATIHAN 2.B

1. Gunakan definisi limit untuk membuktikan:

a.  $\lim_{x \rightarrow 0} (2x - 1) = -1.$

b.  $\lim_{x \rightarrow -21} (3x - 1) = -64.$

c.  $\lim_{x \rightarrow 5} \left( \frac{x^2 - 25}{x - 5} \right) = 10.$

d.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2x^2 - x}{x} \right) = -1.$

e.  $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{2x} = \sqrt{2}.$

2. Buktikan bahwa  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0.$

3. Dengan menggunakan limit kiri dan limit kanan, buktikan bahwa

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0.$$

## 2.3 TEOREMA-TEOREMA LIMIT

Membuktikan eksistensi dan nilai dari limit menggunakan definisi adalah hal yang cukup sulit dan memerlukan waktu ekstra. Teorema limit akan membantu kita untuk menyelesaikan masalah-masalah berkaitan dengan limit. Teorema berikut merupakan teorema yang paling sering digunakan dalam menyelesaikan masalah limit.

### **Teorema 2.2**

Misalkan  $f$  dan  $g$  merupakan fungsi yang memiliki limit di  $c$ , kemudian  $k \in \mathbb{R}$ , dan  $n \in \mathbb{N}$ , maka

- a.  $\lim_{x \rightarrow c} k = k$
- b.  $\lim_{x \rightarrow c} x = c$
- c.  $\lim_{x \rightarrow c} (kf)(x) = k \lim_{x \rightarrow c} f(x)$
- d.  $\lim_{x \rightarrow c} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
- e.  $\lim_{x \rightarrow c} (f - g)(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
- f.  $\lim_{x \rightarrow c} (fg)(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
- g.  $\lim_{x \rightarrow c} (f/g)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$
- h.  $\lim_{x \rightarrow c} f^n(x) = \left( \lim_{x \rightarrow c} f(x) \right)^n$
- i.  $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) \geq 0$  untuk  $n$  genap
- j. Jika  $p(x)$  polinom, maka  $\lim_{x \rightarrow c} p(x) = p(c)$

**Contoh 2.3.3:** Hitunglah  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$ .

*Penyelesaian*

Perhatikan bahwa kita tidak bisa langsung menggunakan Teorema 2.5, kita harus terlebih dahulu membuat permisalan agar bentuk fungsi pada Contoh 5 menjadi seperti Teorema 2.5 bagian c. Pandang,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \sin 3x}{3x} && \text{(pembilang dan penyebut dikali dengan 3)} \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x}\end{aligned}$$

Misalkan  $y = 3x$ . Karena  $x \rightarrow 0$ , maka  $y = 3x \rightarrow 0$ . Akibatnya,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 3 \cdot 1 = 3.$$

## LATIHAN 2.C

1. Jika  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 3$  dan  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -1$ , maka

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{2f(x) - 3g(x)}{f(x) + g(x)} = \dots$$

2. Carilah masing-masing limit berikut atau nyatakan bila tak ada limitnya.

a.  $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{\sqrt{3+x}}{x}$

b.  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$

c.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{x-2}$

3. Selesaikan limit trigonometri berikut.

a.  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \cos t}{t+1}$

b.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

## 2.4 LIMIT DI KETAKHINGGAAN DAN LIMIT TAK HINGGA

Pembahasan kita sampai sejauh ini hanya untuk limit fungsi di sekitar  $c$  bilangan real. Kemudian, bagaimana limit fungsi untuk  $x$  yang menuju nilai tak hingga? Bagaimana pula kita mendefinisikan limit fungsi yang nilainya tak hingga? Mari kita perhatikan definisi berikut.

### **Definisi 2.5** Limit saat $x \rightarrow \infty$

Misalkan  $f(x)$  adalah fungsi yang terdefinisi pada  $[c, \infty)$  untuk suatu  $c \in \mathbb{R}$ , maka  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$  jika dan hanya jika  $\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{R}$  sedemikian sehingga

$$x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

### **Definisi 2.6** Limit saat $x \rightarrow -\infty$

Misalkan  $f(x)$  adalah fungsi yang terdefinisi pada  $(-\infty, c]$  untuk suatu  $c \in \mathbb{R}$ , maka  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$  jika dan hanya jika  $\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{R}$  sedemikian sehingga

$$x < M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

**Contoh 2.4.1:** Buktikan bahwa  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$ .

*Penyelesaian*

Pertama-tama, kita gunakan trik dasar, yaitu bagi pembilang dan penyebut dengan variabel berpangkat tertinggi, yaitu  $x^2$ , diperoleh

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{1+x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} 1} = \frac{0}{0+1} = 0.$$

## LATIHAN 2.D

1. Carilah masing-masing limit berikut:

a.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{5-x^3}$

b.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{t-5}$

c.  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2-x-6}{x-3}$

d.  $\lim_{t \rightarrow -3^+} \frac{t^2-9}{t+3}$

e.  $\lim_{t \rightarrow \sqrt{7}^+} \frac{x}{7-x^2}$

2. Carilah asimtot datar dan asimtot tegak dari fungsi berikut, kemudian sketsakan grafiknya.

$$g(x) = \frac{3}{9-x^2}$$

## 2.5 FUNGSI KONTINU

Sebelumnya kita sudah membahas tentang limit fungsi. Sekarang kita akan membahas mengenai fungsi kontinu. Fungsi kontinu adalah fungsi yang lebih “istimewa” dibanding dengan fungsi yang memiliki limit. Suatu fungsi bisa saja memiliki limit pada titik  $c$ , namun belum tentu kontinu di titik  $c$  tersebut. Sebaliknya, jika suatu fungsi kontinu pada titik  $c$ , sudah pasti fungsi tersebut memiliki limit di  $c$ . Sifat kontinu pada fungsi memberikan sifat-sifat istimewa pada fungsi tersebut yang belum tentu dimiliki oleh fungsi lain yang hanya memiliki limit namun tidak kontinu. Pada subbab ini, kita akan bahas definisi fungsi kontinu dan juga beberapa keistimewaannya.

### **Definisi 2.8 Fungsi Kontinu**

Misalkan fungsi  $f$  terdefinisi pada interval buka  $I$  yang memuat  $c \in \mathbb{R}$ , fungsi  $f$  dikatakan kontinu di  $c$  jika

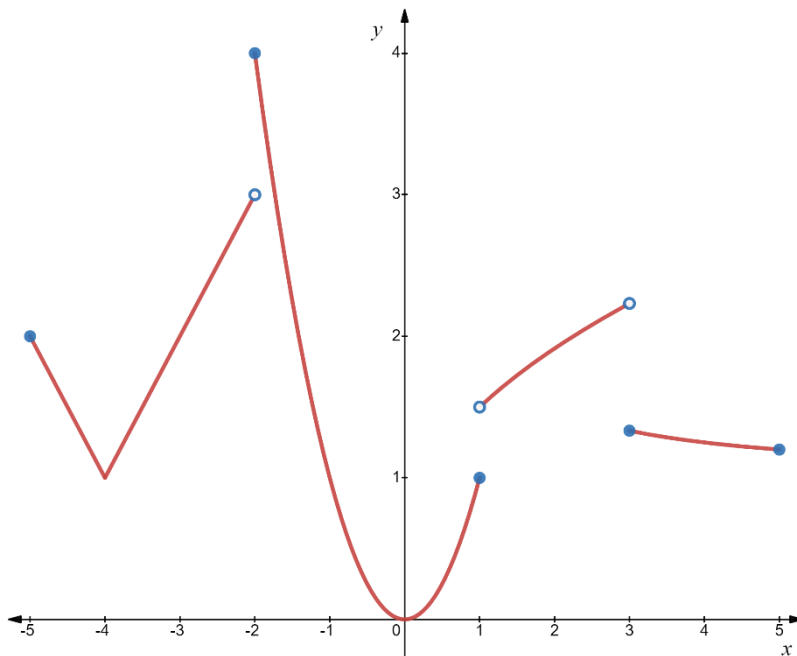
$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c).$$

Berdasarkan definisi, berarti ada 3 hal yang harus dipenuhi oleh fungsi yang kontinu di  $c$ , yaitu

1.  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  ada
2.  $f(c)$  ada
3.  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  dan  $f(c)$  memiliki nilai yang sama

## LATIHAN 2.E

1. Dari grafik berikut, tunjukkan interval di mana fungsinya kontinu.



2. Fungsi  $f(x) = \cos\left(\frac{x^2-1}{x+1}\right)$  tidak terdefinisi di suatu titik tertentu. Bagaimana seharusnya didefinisikan agar kontinu di titik tersebut?
3. Di titik mana fungsi berikut tidak kontinu?

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ -x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$$

## BAB 3 TURUNAN

Sasaran Materi:

### 3.1 Dua Masalah dengan Satu Tema

Mengetahui latar belakang konsep turunan

### 3.2 Turunan

Memahami konsep dan dapat menentukan turunan fungsi di suatu titik yang diberikan

### 3.3 Aturan Pencarian Turunan

Menggunakan aturan turunan untuk menentukan turunan fungsi yang merupakan jumlah/selisih atau hasil kali/hasil bagi dua fungsi sederhana.

### 3.4 Turunan Fungsi Trigonometri

Menentukan turunan fungsi trigonometri

### 3.5 Turunan Tingkat Tinggi

Menentukan turunan tingkat tinggi dari fungsi yang diberikan, termasuk pola atau rumus umumnya

### 3.6 Aturan Rantai

Menentukan turunan fungsi yang merupakan komposisi dari dua fungsi sederhana

### 3.7 Diferensial Implisit

Menentukan turunan fungsi yang diberikan secara implisit

### 3.8 Laju yang Berkaitan

Menentukan laju dari suatu besaran yang berkaitan dengan besaran lain yang diketahui lajunya

### 3.9 Diferensial dan Aproksimasi

Memahami konsep diferensial dan menggunakannya untuk menentukan nilai hampiran dari suatu fungsi di titik yang diberikan

## 3.2 TURUNAN

Pada bagian sebelumnya telah dijelaskan bahwa konsep gradien garis singgung dan kecepatan sesaat didasarkan pada prinsip yang serupa dengan pendekatan limit. Hal ini juga berlaku untuk berbagai situasi lainnya, seperti pertumbuhan organisme dalam bidang biologi, keuntungan marginal dalam ekonomi, kepadatan kawat dalam fisika, tingkat peluruhan dalam kimia, dan beragam situasi lainnya. Ini menjadi pendorong untuk mengkaji prinsip ini tanpa memandang istilah khusus dan implementasinya, menggunakan istilah yang baru yaitu turunan (derivative).

**Definisi Turunan** fungsi  $f$  adalah fungsi lain  $f'$  (dibaca: “ $f$  aksen”) yang nilainya pada sebarang bilangan  $c$  adalah

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

nilai limit tidak boleh  $\infty$  atau  $-\infty$ .

Terdapat juga bentuk yang setara dengan turunan  $f'(x)$ , yaitu mengganti  $c + h$  menjadi  $x$  sehingga diperoleh  $x - c$  mengganti  $h$ .

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Untuk lebih mempertajam pemahaman, akan diberikan contoh.

### LATIHAN 3.A

1. Cari persamaan garis singgung pada  $y = 1/(x - 1)$  di  $(0, -1)$ .
2. Sebuah benda awalnya diam, jatuh dikarenakan gaya berat.  
(percobaan menunjukkan apabila dari keadaan diam, maka P jatuh sejauh  $16t^2$  ft dalam  $t$  detik). Carilah kecepatan pada  $t = 3,8$  detik dan  $t = 5,4$  detik.
3. Misalkan  $f(x) = 2x + 1$ . Carilah  $f'(3)$ .
4. Misalkan  $f(x) = \sin x$ . Carilah  $f'(x)$ .

### 3.3 ATURAN PENCARIAN TURUNAN

Pada pembahasan sebelumnya telah di jelaskan bagaimana proses pencarian turunan dari suatu fungsi menggunakan limit yakni

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Tapi dengan menggunakan limit untuk mencari turunan membutuhkan waktu yang cukup lama, oleh karena itu akan dibuat suatu operator. Operator ini dapat dinotasikan sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dx} \text{ atau } D_x$$

Ketiga operator diatas bermakna sama yaitu turunan fungsi terhadap  $x$ . Sebagai contoh misalkan  $f(x) = x^3 - x$ , maka turunannya adalah

$$f'(x) = 3x^2 - 1, \text{ atau } \frac{d}{dx}(x^3 - x) = 3x^2 - 1,$$
$$\text{atau } D_x(x^3 - x) = 3x^2 - 1$$

Suatu fungsi dapat diklasifikasikan menjadi beberapa jenis tergantung dari karakteristiknya, khususnya untuk mencari turunan dari fungsi dapat dilihat dengan aturan yang ada berikut ini.

#### **Aturan Pencarian Turunan:**

1. Jika  $f(x) = k$  (konstanta), maka  $f'(x) = 0$
2. Jika  $f(x) = x$ , maka  $f'(x) = 1$
3. Aturan pangkat: Jika  $f(x) = x^n$  maka  $f'(x) = nx^{n-1}, n \in \mathbb{Z}$
4. Aturan kelipatan konstanta:  $(kf)'(x) = kf'(x)$

### 3.4 ATURAN FUNGSI TRIGONOMETRI

Pada bagian ini akan kita pelajari bagaimana turunan pada fungsi trigonometri. Untuk mencari turunan fungsi trigonometri kita menggunakan definisi turunan dengan limit dan identitas penjumlahan.

Perhatikan untuk  $f(x) = \sin(x)$ , maka

$$\begin{aligned}D_x \sin(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \left( -\sin(x) \frac{1 - \cos(h)}{h} + \cos(x) \frac{\sin(h)}{h} \right) \\&= -\sin(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \cos(h)}{h} \right) + \cos(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(h)}{h} \right)\end{aligned}$$

Ingat limit trigonometri khusus, di mana  $\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \cos(h)}{h} \right) = 0$  dan  $\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(h)}{h} \right) = 1$ .

Jadi,

$$D_x \sin(x) = -\sin(x) \cdot 0 + \cos(x) \cdot 1 = \cos(x).$$

Sementara itu,

$$\begin{aligned}D_x \cos(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \left( -\cos(x) \frac{1 - \cos(h)}{h} - \sin(x) \frac{\sin(h)}{h} \right) \\&= -\cos(x) \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \cos(h)}{h} \right) - \sin(x) \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(h)}{h} \right) \\&= -\cos(x) \cdot 0 - \sin(x) \cdot 1 = -\sin(x).\end{aligned}$$

### 3.5 ATURAN RANTAI

Pada bagian ini akan dibahas mengenai aturan rantai, yang juga dikenal sebagai "*chain rule*" dalam turunan, adalah suatu konsep penting dalam matematika yang digunakan untuk menghitung turunan dari suatu fungsi yang merupakan komposisi dari dua fungsi sederhana.

Bayangkan pencarian turunan dari

$$f(x) = (3x^2 - 5x - 7)^{99}$$

atau

$$f(x) = \sin 5x$$

Kita harus menjabarkannya dengan memangkatkan atau menggunakan rumus trigonometri.

Namun ada satu cara yang akan membantu kita dalam mengerjakannya dengan cepat, yaitu dengan menggunakan fungsi komposisi.

**Teorema Aturan Rantai** Misalkan  $y = f(u)$  dan  $u = g(x)$ . Jika  $g$  terdiferensiasikan di  $x$  dan  $f$  terdiferensiasikan di  $u = g(x)$ , maka fungsi komposit  $f \circ g$ , yang didefinisikan oleh  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ , maka turunannya

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

yaitu

$$D_x f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

atau

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Pembuktian teorema aturan rantai cukup sederhana, tetapi perlu kekreatifan dalam memahami definisi turunan.

### 3.6 ATURAN TINGKAT TINGGI

Pada bagian ini, akan dijelaskan bagaimana jika turunan dilakukan berulang kali misalkan sampai  $n$  kali atau bisa di notasikan  $f^n$ . Turunan ini dapat disebut sebagai turunan tingkat tinggi, sebagai contoh

$$f(x) = 3x^4 + x^3 - 4x^2 + 5x - 10$$

maka

$$f'(x) = 12x^3 + 3x^2 - 8x + 5$$

$$f''(x) = 36x^2 + 6x - 8$$

$$f'''(x) = 72x + 6$$

$$f^4(x) = 72$$

$$f^5(x) = 0.$$

Karena turunan dari fungsi nol adalah nol, maka turunan ke lima dan seterusnya (turunan tingkat yang lebih tinggi atau *high order deivate*) dari  $f$  adalah nol.

Oleh karena itu, diperkenalkan notasi-notasi turunan untuk fungsi  $y = f(x)$ , yaitu

$$f'(x), y', D_x y, \frac{dy}{dx}$$

Untuk turunan berikutnya dinotasikan dengan

$$f^{(n)}(x), y^{(n)}, D_x^n y, \frac{d^n y}{dx^n}$$

### 3.7 DIFERENSIAL IMPLISIT

Pada bagian ini, akan dijelaskan metode yang digunakan dalam kalkulus untuk menghitung turunan fungsi yang dinyatakan secara implisit sebagai persamaan. Artinya, Anda memiliki persamaan yang mengaitkan dua atau lebih variabel, dan Anda ingin menghitung turunan salah satu variabel terhadap variabel lainnya, meskipun variabel tersebut tidak dinyatakan eksplisit dalam bentuk fungsi. Dalam beberapa kasus, ekspresi eksplisit dari fungsi tersebut mungkin sulit atau bahkan tidak mungkin ditemukan, dan itulah saat diferensial implisit menjadi berguna. Sebagai contoh,

**Contoh 3.7.1:** Jika ditanyakan persamaan garis singgung dari persamaan  $y^3 + 7y = x^3$  di titik  $(2,1)$ . Maka kita harus mencari dulu gradien dari persamaan tersebut yaitu  $m = dy/dx$ . Namun kita tidak memiliki  $y = f(x)$  secara eksplisit.

Jika kita nyatakan fungsinya dalam  $y(x)$ , maka

$$[y(x)]^3 + 7y(x) = x^3$$

Selanjutnya dengan menggunakan aturan rantai

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(y^3) + \frac{d}{dx}(7y) &= \frac{d}{dx}(x^3) \\ \frac{d}{dy} \frac{dy}{dx}(y^3) + \frac{d}{dy} \frac{dy}{dx}(7y) &= \frac{d}{dx}(x^3) \\ \frac{d}{dy}(y^3) \frac{dy}{dx} + \frac{d}{dy}(7y) \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^3) \\ 3y^2 \frac{dy}{dx} + 7 \frac{dy}{dx} &= 3x^2 \\ (3y^2 + 7) \frac{dy}{dx} &= 3x^2 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{3x^2}{3y^2 + 7}\end{aligned}$$

### LATIHAN 3.F

1. Tentukanlah turunan dari persamaan  $4x^3 + 7xy^2 = 2y^3$
2. Cari persamaan garis singgung  $\sin(xy) = y$  di titik  $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

### 3.8 LAJU YANG BERKAITAN

Pada bagian ini, akan dijelaskan konsep yang digunakan untuk menghitung laju perubahan satu besaran terhadap waktu ketika besaran tersebut berkaitan dengan perubahan lain yang juga tergantung pada waktu. Dalam situasi laju yang berkaitan, perubahan satu besaran akan memengaruhi perubahan besaran lainnya, dan kita ingin memahami bagaimana perubahan-perubahan ini terkait dengan waktu.

Jika  $x$  dan  $y$  adalah dua peubah yang saling berkaitan dan saling berubah terhadap waktu  $t$ , maka  $dx/dt$  dan  $dy/dt$  merupakan dua laju yang berkaitan.

**Contoh 3.8.1:** Sebuah pesawat udara terbang ke utara dengan laju 640 mil/jam melintasi sebuah kota pada tengah hari. Pesawat kedua terbang ke timur dengan laju 600 mil/jam langsung di atas kota yang sama 15 menit kemudian. Jika pesawat-pesawat itu terbang pada ketinggian yang sama, seberapa cepat mereka berpisah pada pukul 13.15?

Penyelesaian Misalkan  $t$  merupakan waktu yang diperlukan pesawat untuk terbang.

Perhatikan bahwa pesawat pertama terbang 15 menit lebih awal yang berarti telah menempuh  $640 \cdot \frac{15}{60} = 160$  mil maka posisi pesawat tersebut saat  $t$  (misalkan  $y$ ) adalah  $y + 160$ .

Untuk

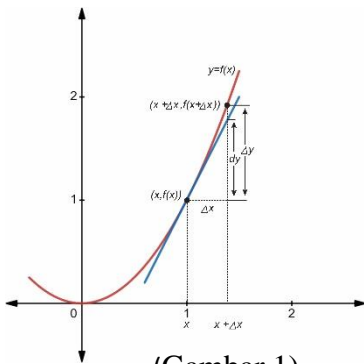
$$t > 0, dy/dt = 640 \text{ dan } dx/dt = 600.$$

Akan dicari  $ds/dt$  atau kecepatan kedua pesawat berpisah pada pukul 13.15 yaitu saat  $t = 1$ .

$$s^2 = x^2 + (y + 160)^2$$

### 3.9 DIFERENSIAL DAN APROKSIMASI

Pada bagian ini, akan dijelaskan konsep diferensial dan aproksimasi. Diferensial merujuk pada perubahan sekecil-kecilnya dalam nilai suatu fungsi atau variabel. Sedangkan Aproksimasi adalah suatu metode yang digunakan untuk mendekati atau perkiraan nilai yang akurat dari suatu besaran atau fungsi.



(Gambar 1)

Misal  $f$  adalah fungsi yang terdiferensiasi, maka

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

Jika  $\Delta x$  sangat kecil, maka

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx \Delta x f'(x)$$

Pandang bahwa ruas kiri ekspresi dari  $\Delta y$  yaitu perubahan dari  $y$  mengikuti perubahan  $x$ . Dan pandang juga ruas kanan adalah  $dy$  yang merupakan aproksimasi untuk  $\Delta y$ .

Definisi Diferensial. Misalkan  $y = f(x)$  adalah fungsi terdiferensiasi dari variabel bebas  $x$ .

- $\Delta x$  adalah pertambahan variabel bebas  $x$ .
- $dx$  disebut diferensial variabel bebas  $x$ , yang sama dengan  $\Delta x$ .
- $\Delta y$  adalah perubahan variabel  $y$  ketika  $x$  bertambah, yaitu  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ .
- $dy$  disebut diferensial variabel tak-bebas  $y$ , didefinisikan oleh  $dy = f'(x)dx$ .

## BAB 4 APLIKASI TURUNAN

Sasaran Materi:

### 4.1 Maksimum dan Minimum

Menentukan nilai maksimum dan minimum dari suatu fungsi yang diberikan.

### 4.2 Kemonotonan dan Kecekungan

Menentukan selang kemonotonan (dan titik ekstrim), serta selang kecekungan dan titik belok, dari suatu fungsi yang diberikan.

### 4.3 Ekstrim Lokal dan Ekstrim pada Interval Terbuka

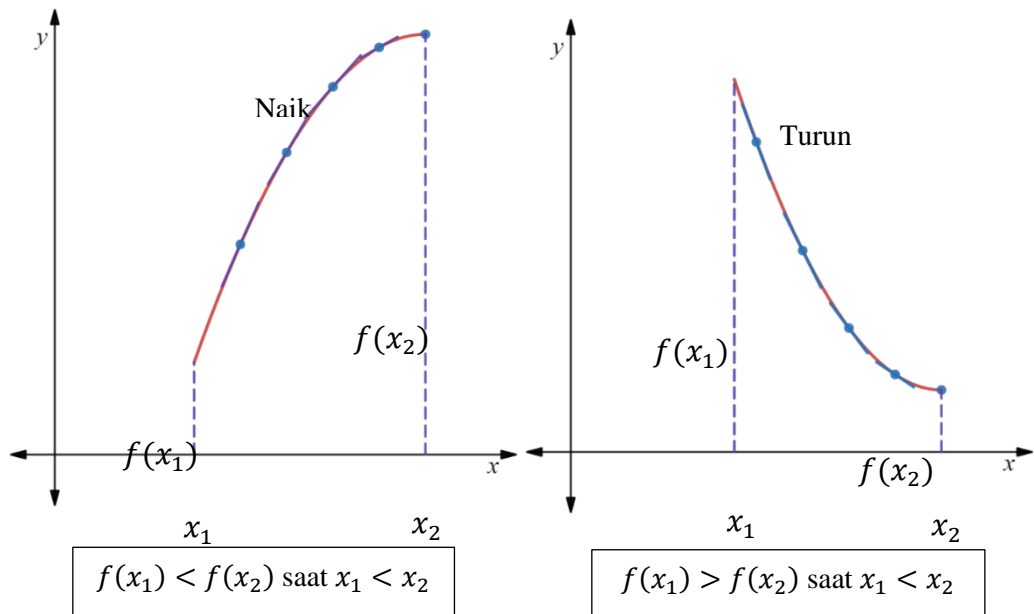
Menentukan nilai maksimum dan minimum lokal dari suatu fungsi yang diberikan.

### 4.4 Penggambaran Grafik Fungsi

Menggambaran grafik dari suatu fungsi yang diberikan menggunakan kalkulus yaitu kemonotonan dan kecekungan.

## 4.2 KEMONOTONAN DAN KECEKUNGAN

Aplikasi turunan selanjutnya adalah menentukan kapan suatu fungsi naik dan kapan suatu fungsi turun (kemonotonan fungsi) serta menentukan kapan kurva suatu fungsi cekung ke atas atau ke bawah (kecekungan). Perhatikan gambar berikut



Gambar ini mengilustrasikan definisi fungsi naik dan fungsi turun yang diberikan sebagai berikut.

**Definisi.** Misalkan  $f$  terdefinisi pada interval  $I$  (terbuka, tertutup, atau tidak satu pun) dan misalkan  $x_1$  dan  $x_2$  adalah sembarang titik yang termuat di  $I$ .

- $f$  **naik** pada  $I$  jika  $f(x_1) < f(x_2)$  saat  $x_1 < x_2$
- $f$  **turun** pada  $I$  jika  $f(x_1) > f(x_2)$  saat  $x_1 < x_2$
- $f$  **monoton murni** pada  $I$  jika  $f$  naik pada  $I$  atau turun pada  $I$ .

### 4.3 PENGGAMBARAN GRAFIK FUNGSI

Setelah memahami aplikasi turunan dalam menentukan nilai ekstrim, kemonotonan dan kecekungan suatu fungsi, maka selanjutnya kita dapat menggunakan pemahaman ini untuk menggambar grafik fungsi tersebut. Penggambaran sketsa grafik fungsi mengikuti langkah-langkah berikut

**Langkah 1:** Analisis pendahuluan

- (a) Tentukan daerah asal dan daerah hasil fungsi
- (b) Tentukan apakah terdapat kesimetrian terhadap sumbu- $y$  dan titik asal
- (c) Tentukan perpotongan dengan sumbu-sumbu koordinat.

**Langkah 2:** Analisis Nilai Ekstrim, Kemonotonan, dan Kecekungan

- (a) Gunakan turunan pertama untuk mencari titik-titik kritis dan mengetahui dimana grafik fungsi naik dan turun.
- (b) Uji titik-titik kritis untuk menentukan nilai maksimum dan minimum lokal.
- (c) Gunakan turunan kedua untuk mengetahui dimana grafik cekung ke atas dan cekung ke bawah dan untuk mengetahui titik balik
- (d) Cari asimtot-asimtot

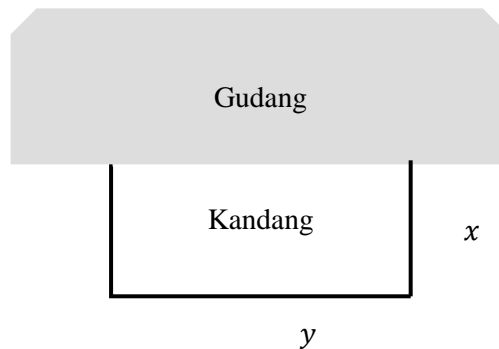
**Langkah 3:** Gambarkan beberapa titik termasuk titik-titik kritis dan titik balik

**Langkah 4:** Sketsakan grafik

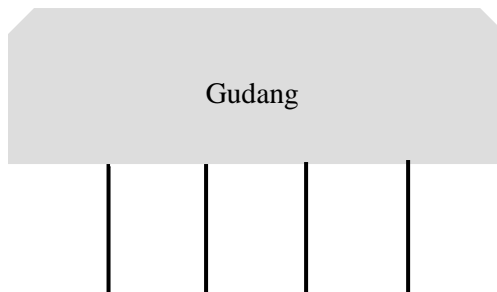
## STUDI KASUS

### **Studi Kasus 1.** Masalah Optimisasi dalam Bidang Matematika

Misalkan seorang petani mempunyai kawat duri sepanjang 80 feet yang akan digunakan untuk memagari kandang berbentuk segiempat pada salah satu sisi gudangnya yang mempunyai panjang 100 feet seperti pada gambar di bawah (sisi di sepanjang gudang tidak memerlukan duri). Tentukan ukuran kandang sedemikian sehingga luas kandang maksimum?



Kemudian jika petani tersebut memutuskan untuk membuat tiga kandang yang identik menggunakan 80 feet kawat duri yang ada (seperti gambar di bawah), tentukan ukuran untuk seluruh lingkupan agar seluruh kandang seluas mungkin.



#### LATIHAN 4

1. Tentukan titik-titik kritis dan carilah nilai maksimum dan minimum dari fungsi-fungsi berikut pada interval yang diberikan
  - a.  $f(x) = x^2 + x; \quad I = [-2, 2]$
  - b.  $g(x) = x^3 - 3x + 1; \quad I = \left[-\frac{3}{2}, 3\right]$
2. Tentukan di mana grafik fungsi yang diberikan naik, turun, cekung ke atas, cekung ke bawah serta sketsakan grafiknya
  - a.  $f(x) = x^3 - 12x + 1$
  - b.  $g(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$
3. Tentukan nilai minimum lokal dan nilai maksimum lokal dari fungsi-fungsi yang diberikan
  - a.  $f(x) = x^4 + x^2 + 3$
  - b.  $g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}$
4. Tentukan volume terbesar dari sebuah tabung jika diletakkan ke dalam sebuah bola yang berjari-jari  $r$ .
5. Sebuah pulau kecil letaknya 2 mil dari titik terdekat  $P$  pada sebuah panytai lurus dari sebuah danau besar. Jika seorang wanita di pulau dapat mendayung perahunya dengan laju 3 mil/jam dan dapat berjalan 4 mil/jam, dimana dia harus mendaratkan perahunya agar sampai di sebuah kota sejauh 10 mil dari  $P$  dalam waktu sesingkat mungkin?

## **DAFTAR PUSTAKA**

Gunawan, H. Sukses Dalam Kalkulus. ITB Press.

Purcell, Edwin J., Varberg, Dale & Rigdon, Steven E. 2006. Calculus 9th Ed. Prentice Hall.

Stewart, J. Single Variable Calculus 6th Edition Early Transcendentals. Thomson Books.

Thomas, G.B. Calculus Early Transcendentals 13th Edition. Pearson.